Réf. : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?12,1734364

La question : « J'ai un problème sur la méthode Monte Carlo. Concrètement elle repose sur la loi forte des grands nombres qui dit (en gros) que pour tout \omega, 1/n Somme X_i(\omega)=E(X).

Ce que je ne comprends pas c'est que lorsqu'on utilise la méthode MC, on fait un tirage des X_i ce qui nous donne :
1/n Somme X_i (\omega_i). On ne peut pas savoir que ces tirages proviennent du même \omega. Et donc on n'est pas dans le cas de la loi des grands nombres. »

Ce que je pourrais répondre :
La justification de la méthode de Monte-Carlo réside dans le fait que la concentration des résultats proches de la moyenne est plus grande. Il suffit d'observer la courbe de Gauss pour le visualiser.
Il n'est pas évident que la valeur espérée est la moyenne arithmétique. En effet, la définition des probabilités, à savoir, « postulat de la moyenne », « loi des grands nombres » et « loi normale » est peu précise dans les différents documents, et donc assez controversée. Cependant, sauf cas particulier, on peut considérer que la moyenne arithmétique est la valeur espérée.
Si on utilise et applique la méthode de Monte-Carlo, on sait ce qu'on fait, donc on sait que les tirages proviennent du même contexte.

Une réponse :
« c'est le grand intérêt de l'approche abstraite des probas initiée par Kolmogorov »
Je n'ai pas lu que l'axiomatique de Kolmogorov évoque les lois de probabilités. En l'occurrence, l'application à la méthode de Monte-Carlo n'est en aucun cas justifiée dans cette axiomatique.

Une autre réponse :
« Ben, oui, dans la vraie vie, quand tu fais un tirage, tu as des xi qui sont fixés, et la loi forte des grands nombres ne te dit pas que dans la vraie vie, tes moyennes vont vraiment converger vers l'espérance. »
Cette intervention est la négation pure et simple de la théorie des probabilités. Si cette phrase était vraie, alors toutes les utilisations des probabilités, elles sont nombreuses, seraient fausses et injustifiables, par définition. Heureusement il n'en est rien et on peut regretter que de telles erreurs et défauts de connaissance soient aussi fréquents, surtout de la part de gens dont c'est la charge d'enseigner ces notions.
En tout cas, la justification mathématique est parfaitement claire, contrairement à ce qu'on peut lire.

Je ne sais pas si le demandeur a compris les réponses. S'il a bien lu les diverses interventions, il a dû constater que ces notions n'étaient pas claires dans l'esprit de ces « spécialistes ».

Je vais tenter d'expliquer l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo.
On a un problème à résoudre. Cela peut être la vérification de la qualité d'une liste par rapport à un résultat théorique connu, ou le calcul d'une valeur approchée d'une fonction compliquée, telle qu'il n'existe pas de méthode simple pour trouver cette valeur. On cite généralement, à titre d'exemple, la résolution d'équations différentielles.
On dispose d'une méthode aléatoire pour créer une liste. Dans le premier cas, la liste existe, mais elle est inutilisable telle quelle, alors on en tire un échantillon aléatoire, dans le second cas, il s'agira d'un générateur de nombres aléatoires, et on déterminera approximativement un intervalle de calcul.
Dans tous les cas, quel que soit le contexte, on établi une liste de valeurs indépendantes suivant une même procédure qu'on appelle « loi de probabilité ». La théorie des probabilités précise que la moyenne arithmétique des valeurs de la liste est le résultat le plus probable. Elle indique d'autre part que la répartition des écarts à la moyenne est conforme à la répartition normale.

En référence à une expression employés précédemment, ceci est ce qui se passe « dans la vraie vie », et cela est incontestable.
Dans ce contexte, il a été évoqués des cas, telle la loi de Cauchy, qui sont considérés comme des contre-exemples. En effet, certaines fonctions, par exemple si elle contiennent la variable au dénominateur, peuvent donner des résultats qui paraissent contraires à la théorie. On peut utiliser la méthode de Monte-Carlo valablement en réduisant l'intervalle de définition de façon à obtenir un résultat convenable.
D'autre part, il ne me paraît pas utile d'avoir une liste très longue, par contre, il vaut mieux répéter l'expérience, chacune donnant un résultat et ensuite comparer ces résultats pour apprécier la dispersion et en déduire un intervalle de confiance.

Pour conclure, je tiens à préciser que la justification de la méthode de Monte-Carlo ne réside pas dans l'application de la loi des grands nombres, mais dans l'application de la loi normale.

Rappel : il est toujours possible de réagir en me contactant.