Ce qu'il ne faut pas faire.

Voici une question posée sur un forum de mathématiques :

Soit x un irrationnel quelconque:
{x} = a1.10^(-1) + a2.10^(-2) + ... + an.10^(-n)
On a pour tout n, an appartient à { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
On peut définir la série qui à chaque nombre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 associe le nombre de fois qu'il apparaît dans le développement décimal de x.
La question c'est de savoir quand n tend vers + inf si l'écart type de cette série tend vers 0.

Au cours de la discussion, on peut lire l'intervention suivante :

un irrationnel étant infini l'effectif de chaque chiffre est infini ...
si à un irrationnel x on associe les trois suites ::
$x_n =$ troncature de x à 10^{-n}
$m_n =$ moyenne des chiffres de x_n
$v_n =$ variance des chiffres de x_n (carré de l'écart type)

alors tout ce qu'on peut dire :
la suite (x_n) converge vers x (trivialité)
les suites $(m_n)\ et\ (v_n)$ sont bornées

si on suppose qu'il y a équi-répartition des chiffres alors ::
$$\lim_{n\to+\infty} m_n = \frac{1}{10}(0+1+2+3+...+8+9) = 4{,}5$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{10}(0^2+1^2+3^2+...+8^2+9^2\} - 4{,}5^2 = \frac{1}{60}(9*10*19) - \frac{81}{4} = \frac{33}{4}$$
soit un écart type d'environ 2,87 ...

(Fin de citation)

Discussion.

A l'évidence, l'auteur de cette réponse effectue des opérations arithmétiques sur des chiffres. La différence entre "chiffre" et "nombre", apprise en primaire a bien été retenue, puisqu'il n'y a pas d'erreur sur l'utilisation des termes.
On sait qu'un nombre N peut être écrit sous la forme suivante
$N=A^b + B^b + C^b + D^b + \dots$
Où A, B, C, D ... sont des caractères numériques et b des puissance de la base utilisée.
Exemple $N = 123456 = 1x10^5 + 2x10^4 + 3x10^3 + 4x10^2 + 5x10^1 + 6x10^0$

En base décimale, les caractères numériques, qu'on appelle généralement "chiffres" appartiennent à l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
En base hexadécimale, ils appartiennent à l'ensemble {0 ; 1 ; … ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F}
Si on travaille en base 100, on pourra, par exemple utiliser les caractères :
{00 ; 01 ; 02 ; … ; 08 ; 09 ; 10 ; 11 ; 12 ; … ; 97 ; 98 ; 99} c'est à dire que deux chiffres accolés forment un caractère.

Restons maintenant en base 10, c'est à dire la base que l'on utilise dans le cas présent, puisqu'il s'agit de l'étude de valeurs décimales.
Peut-on dire que le chiffre 4 est égal au chiffre 3 auquel on a rajouté 1, de la même façon qu'on pourrait dire que le chiffre (ou caractère) E est égal au caractère D auquel on a rajouté le caractère B ? Evidemment non.
Alors, que signifie la ligne :

$$\lim_{n \to +\infty} m_n = \frac{1}{10}(0+1+2+3+...+8+9) = 4{,}5$$

Il y a l'addition de 10 caractères numérique, puis une division par 10. Cela ressemble à une moyenne de 10 nombres. Ce ne sont pas des nombres, mais des chiffres représentés par des caractères numériques. La valeur résultante (4.5) n'a donc aucun sens.
Pour donner une comparaison, ce serait comme si un banquier prenait la moyenne des numéros de comptes et/ou de contrats pour évaluer la patrimoine d'un client.

La ligne suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{10}(0^2+1^2+3^2+...+8^2+9^2\} - 4{,}5^2 = \frac{1}{60}(9*10*19) - \frac{81}{4} = \frac{33}{4}$$

n'a non plus aucun sens, et pour la même raison.

Il n'est pas rare de voir le même type d'erreur lorsqu'on utilise un dé à jouer comme exemple d'application des probabilités. On calcule la "moyenne" µ=1/6 (1+2+3+4+5+6) = 3.5. Or naturellement aucune face n'est numérotée 3.5. Comment pourrions-nous mener des calculs de probabilité avec un dé qui comporterait des dessins quelconques comme des caractères chinois, des animaux ou des fleurs ?

La raison de ce type d'erreur est la méconnaissance de la notion d'événement.
Dans le contexte du présent papier, l'événement étudié est la présence de tel ou tel caractère numérique, et non pas la valeur numérique que l'on donne habituellement à ce caractère. Puisqu'on suppose qu'il y a égale répartition, chaque chiffre a une chance sur dix d'être présent. Si le nombre de chiffres du nombre étudié est 500, alors la chance de chacun des chiffres d'être présent est exactement 1/10, soit un nombre probable d'apparition = 500/10=50.